

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica appello straordinario	codice 947981 20 marzo 2025
--------------------------------	---	--------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	d
2	a
3	a
4	d
5	c
6	c
7	d
8	c
9	d
10	c

1. La funzione $f : (1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \log \frac{x}{2}$

(a) è iniettiva ma non surgettiva

(b) è bigettiva

(c) è surgettiva ma non iniettiva

► (d) non è né iniettiva né surgettiva

Soluzione:

$$f: (1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \log \frac{x}{2}.$$

f è continua.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{\frac{1}{1-1^+}} \log \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{0^-}} (-\log 2) = e^{-\infty} (-\log 2) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = e^{\frac{1}{1-2}} \log \frac{2}{2} = e^{-1} \cdot \log 1 = 0$$

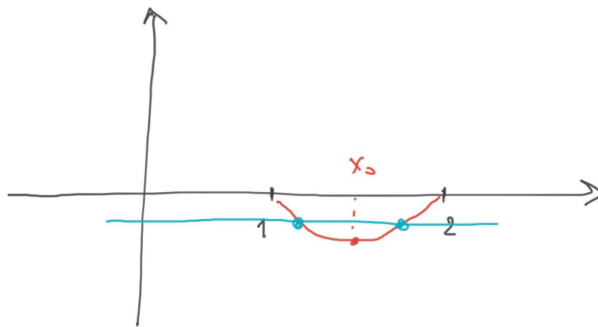
$$\text{Inoltre } f(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{1-x}} \log \frac{x}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \log \frac{x}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 2, \text{ quindi } f(x) \leq 0 \forall x \in (1, 2]$$

Per il teorema di Weierstrass generalizzato f ha minimo, quindi non è surgettiva.

Osserviamo anche che basterebbe dire che $f \leq 0$ implica la non surgettività.

Se indicassimo con x_0 il punto di minimo, applicando il teorema di valori intermedi agli intervalli $(1, x_0]$ e $[x_0, 2]$ otterremo che f non è iniettiva.



2. La funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{e^{(x^3)}-1}$

- (a) non ha né massimo né minimo (b) è limitata ma non ha massimo
(c) è limitata superiormente ma non inferiormente (d) ha massimo

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{e^{(x^2)} - 1}$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, $t \rightarrow 0$
con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $t = x^2$ ottenendo

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Utilizziamo anche $e^t = 1 + t + o(t)$ con $t = x^2$

$$e^{(x^2)} = 1 + x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0, \text{ quindi}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1}}{\cancel{1} + x^2 + o(x^2) - \cancel{1}} = \frac{\cancel{x^2} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)}{\cancel{x^2} (1 + o(1))} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Osserviamo ora che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ per gerarchia di infiniti?

Dato che $\sqrt{1+x^2} - 1 > 0 \quad \forall x > 0$ e che

$e^{(x^2)} - 1 > 0 \quad \forall x > 0$, otteniamo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato (f è continua)

otteniamo che f non ha né massimo né minimo.

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(3x) dx =$$

► (a) $-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$

(b) 0

(c) $-\frac{\pi^2}{24}$

(d) $-\frac{\pi}{2} - 1$

Soluzione:

$$\int x \cos(3x) dx$$

eseguimo l'integrazione per parti
integrando $\cos(3x)$ e derivando x

$$\begin{aligned} \int x \cos(3x) dx &= \frac{\sin(3x)}{3} x - \int \frac{\sin(3x)}{3} \cdot 1 dx = \frac{x \sin(3x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (-\cos(3x)) \\ &= \frac{x \sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} \cos(3x) + c \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos(3x) dx &= \left[\frac{x \sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} \cos(3x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 0 - \frac{1}{9} \cos 0 = \\ &= \frac{\pi}{6} (-1) + \frac{1}{9} \cdot 0 - \frac{1}{9} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$4. \int_0^{\pi/4} (\sin x)^2 \tan x dx =$$

(a) $\frac{\log 2}{4}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$

► (d) $\frac{\log 2}{2} - \frac{1}{4}$

Soluzione:

$$\int (\sin x)^2 \tan x dx = \int (\sin x)^2 \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \sin x dx.$$

Eseguimo la sostituzione $\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x dx = -dt$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \sin x dx &= \int \frac{1 - t^2}{t} (-dt) = \int t - \frac{1}{t} dt = \frac{t^2}{2} - \log|t| + c = \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x| + c. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/4} (\sin x)^2 \tan x dx = \left[\frac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x| \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \log \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \log 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \log \sqrt{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$$

5. Sia $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\sin x (\cos x - 1)}{(e^{x^2} - 1) \sqrt{x} \log(1+x)}$. Allora

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = +\infty$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ non esiste ► (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ esiste finito (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\infty$

Soluzione:

per $x \rightarrow 0^+$

$$f(x) = \frac{\sin x (\cos x - 1)}{(e^{x^2} - 1) \sqrt{x} \log(1+x)} = \frac{[x + o(x^2)] [\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \cancel{1}]}{[\cancel{1} + x^2 + o(x^2) - \cancel{1}] x^{1/2} [x + o(x)]}$$

$$= \frac{\cancel{x} (1 + o(x)) \cancel{x^2} (-\frac{1}{2} + o(x))}{\cancel{x^2} (1 + o(1)) \cdot x^{1/2} \cancel{x} (1 + o(1))} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{x^{1/2} (1 + o(1))}$$

scegliamo quindi $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ ottenendo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2} \quad . \quad \text{Poiché } \int_{\pi/2} g(x) dx \text{ converge,}$$

dal criterio del confronto asintotico abbiamo che
anche $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ converge.

6. L'integrale $\int_{-\infty}^0 e^x \log(1 + e^x) dx$

- (a) diverge positivamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_{-\infty}^0 e^x \log(1+e^x) dx$$

Poniamo $f(x) = e^x \log(1+e^x)$ e osserviamo che f è continua in $(-\infty, 0]$ e $f(x) \geq 0$ nello stesso intervallo.

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$ con $t = e^x$, osservando che per $x \rightarrow -\infty$ $e^x \rightarrow 0$.

Quindi $\log(1+e^x) = e^x + o(e^x) = e^x (1 + o(1))$ per $x \rightarrow -\infty$.

Scegliamo $g(x) = e^{2x}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot e^x (1 + o(1))}{e^{2x}} = 1.$$

Osserviamo ora che $\int_{-\infty}^0 g(x) dx$ converge, infatti

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 g(x) dx &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 e^{2x} dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_M^0 = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow -\infty} (e^0 - e^{2M}) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Per il criterio del confronto asintotico $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge.

7. La successione $a_n = \left(\frac{(\cos n)^2 + (-1)^n (\sin n)^2}{\cos(2n)} \right)^2$

(a) è limitata inferiormente ma non ha minimo

(b) è infinitesima

(c) diverge positivamente

► (d) ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \left(\frac{\cos^n n + (-1)^n \sin^n n}{\cos(2n)} \right)^2$$

consideriamo la sottosuccessione di indici pari

$$b_n = a_{2n} = \left(\frac{\cos^2(2n) + \sin^2(2n)}{\cos(4n)} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2(4n)} \geq 1$$

e la sottosuccessione di indici dispari

$$c_n = a_{2n+1} = \left(\frac{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}{\cos(2(2n+1))} \right)^2 = \left(\frac{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)} \right)^2 = 1$$

Quindi $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n = 1$ per tutti gli indici dispari,
ne segue che la successione ha minimo.

8. La serie $\sum_n \frac{1 + (-1)^n}{5n + 2}$

- (a) converge assolutamente
- (b) è indeterminata
- (c) diverge
- (d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

Poichè $a_n = \frac{1+(-1)^n}{5n+2}$ e osserviamo che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo ora gli indici pari:

$$a_{2k} = \frac{1+(-1)^{2k}}{10k+2} = \frac{2}{10k+2}$$

e quelli dispari

$$a_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{5(2k+1)+2} = 0$$

Quindi tutti i termini di indice dispari sono nulli.

Considerando le somme parziali

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n} = \sum_{k=0}^n a_{2k} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{10k+2}$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{10k+2} = +\infty$ perchè la serie

è asintotica alla serie armonica $\sum \frac{1}{k}$ che diverge.

Dato che $S_{2n+1} = S_{2n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = +\infty$

Poichè le due sottosuccessioni estratte saturano tutti gli indici, otteniamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, quindi la

serie $\sum_n \frac{1+(-1)^n}{5n+2}$ diverge positivamente.

9. L'insieme dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 y^2 (y+x-1)$ è costituito da

- (a) una retta (b) due punti (c) l'insieme vuoto ► (d) due rette e un punto

Soluzione:

$$f(x,y) = x^2 y^2 (y+x-1)$$

$$f_x = y^2 (2x(y+x-1) + x^2) = y^2 x (2(y+x-1) + x) = y^2 x (3x+2y-2)$$

$$f_y = x^2 (2y(y+x-1) + y^2) = x^2 y (2(y+x-1) + y) = x^2 y (2x+3y-2)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 x (3x+2y-2) = 0 \\ x^2 y (2x+3y-2) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha come soluzioni $y=0$ o $x=0$ o $3x+2y-2=0$.

Se $y=0$ anche la seconda equazione è risolta, quindi la retta $y=0$ è una setta di punti stazionari.

Lo stesso succede alla retta $x=0$.

$$\text{Se } 3x+2y-2=0 \text{ allora } 2y = 2-3x \Leftrightarrow y = \frac{2-3x}{2}$$

Possiamo dividere la seconda equazione per $x^2 y$ perché i casi $x=0$ oppure $y=0$ sono già stati considerati. Quindi resta $2x+3y-2=0$.

Sostituiamo la y ottenuta dalla prima equazione ottenendo:

$$2x + 3 \frac{2-3x}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x + 6 - 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2 = 5x \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\text{Sostituendo nell'equazione } y = \frac{2-3x}{2} \text{ abbiamo } y = \frac{2-3 \cdot \frac{2}{5}}{2} = \frac{2-\frac{6}{5}}{2} = \frac{2}{5}$$

Quindi $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ è punto stazionario.

L'insieme dei punti stazionari è formato da due rette e un punto.

10. Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 < 4\}$. Il punto $(0,2,-3)$ è

(a) punto isolato di E

(b) interno a E

► (c) esterno a E

(d) di frontiera e di accumulazione per E

Soluzione:

L'equazione $(x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$ descrive i punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno distanza al quadrato dal punto $(1, 0, 4)$ uguale a 4, quindi un guscio sferico di centro $(1, 0, 4)$ e raggio 2. L'insieme E quindi rappresenta i punti della palla piena di raggio 2 e centro $(1, 0, 4)$, escluso il guscio.

Sostituendo $x=0, y=2, z=-3$ nell'equazione otteniamo

$(0-1)^2 + 2^2 + (-3-4)^2 = 1 + 4 + 49 = 54 > 4$, quindi il punto $(0, 2, 3)$ è esterno all'insieme E .